



Les nombres en rouge sont les coefficients dans la triangle de Newton de la ligne n=4 (voir le triangle)

Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire

VIII. Expérience aléatoire :

a. Activité :

- **1^{ère} expérience** : Si on tombe un morceau de fer d'une hauteur de 3 mètres le morceau tombe par terre si on répète cette expérience plusieurs fois on obtient le même résultat .
- **2^{ème} expérience** : Si on lance un dé de six face numérotés de 1 à 6 on s'intéresse du résultat de la face supérieure . est-ce qu'on peut connaître d'avance le résultat ? (**donc non**)
- **3^{ème} expérience** : Si on lance une pièce de monnaie deux fois successives on s'intéresse des résultats de la face supérieure après chaque lancement de dé . est-ce qu'on peut connaître d'avance le résultat ? (**donc non**)

b. terminologie : Expérience aléatoire – univers - éventualité – évènement :

- **Expérience aléatoire** : toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire .
exemple : **2^{ème} expérience** et **3^{ème} expérience** .
- Les résultats obtenus par cette expérience aléatoire on les note par ω_1 puis ω_2 puis ω_3 ω_n (on général ω_i avec $i \in \{1, 2, \dots; n\}$) .
exemple **2^{ème} expérience** : $\omega_1 = 1$ puis $\omega_2 = 2$ puis $\omega_3 = 3$ puis $\omega_4 = 4$ puis $\omega_5 = 5$ puis $\omega_6 = 6$.
exemple **3^{ème} expérience** : $\omega_1 = FF$ puis $\omega_2 = FP$ puis $\omega_3 = PF$ puis $\omega_4 = PP$.
- **Éventualité** (ou événement élémentaire) : chaque ω_i s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire .
exemple **2^{ème} expérience** : lorsque on obtient **1**, on dit que $\omega_1 = 1$ est une éventualité ou cas possible .
exemple **3^{ème} expérience** : lorsque on obtient **FF**, on dit que $\omega_1 = FF$ est une éventualité ou cas possible .
Univers : les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble s'appelle univers noté $\Omega = \{\omega_1; \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
exemple : pour **2^{ème} expérience** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
exemple : pour **3^{ème} expérience** $\Omega = \{PP; PF, FF, FP\}$
- **Évènement** : toute partie A de Ω s'appelle évènement .
Exemple : $A = \{PP, FF\} \subset \Omega$ donc $A = \{PP, FF\}$ est un évènement.
remarque on peut exprimer : un évènement par une phrase .
exemple $A = \{PP, FF\}$
on exprime A par la phrase suivante A « **les deux lancements de dé donne même résultat** »
❖ Si $A = \Omega$ alors l'évènement Ω s'appelle **évènement certain** .
exemple **2^{ème} expérience** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **évènement certain** .
exemple **3^{ème} expérience** $\Omega = \{PP; PF, FF, FP\}$ **évènement certain**

- ❖ Si $A = \emptyset$ alors l'évènement \emptyset s'appelle **évènement impossible** .
- ❖ Si $A = \{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle **évènement élémentaire** .
 exemple 2^{ème} expérience $\{5\}$ évènement élémentaire .
 exemple 2^{ème} expérience $\{PF\}$ évènement élémentaire .
- ❖ Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **deux évènements incompatibles** .
- ❖ Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle **l'évènement contraire de A** (vis versa) on note $B = \bar{A}$ (de même $A = \bar{B}$) . remarque $cardA + card\bar{A} = card\Omega$.
 exemple 2^{ème} expérience: $A = \{1,2\}$ l'évènement contraire de A est $\bar{A} = \{3,4,5,6\}$.
 exemple 3^{ème} expérience: $A = \{FF, PF\}$ l'évènement contraire de A est $\bar{A} = \{FP; FP\}$.
- ❖ **L'évènement $A \cap B$** est l'ensemble constitué par des éventualités réaliser à la fois par les évènements A et B .
- ❖ **L'évènement $A \cup B$** est l'ensemble constitués par des éventualités réaliser soit par l'évènement A ou par l'évènement B .
- ❖ Les évènements A_1 et A_2 et A_3, \dots, A_p est **une partition de Ω** s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = \Omega$.
 exemple 2^{ème} expérience: $A = \{1,2\}$ et $B = \{5\}$ et $C = \{3,4,6\}$ est **une partition de $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$**
 exemple 3^{ème} expérience: $A = \{PP, FF, PF\}$ et $B = \{FP\}$ est **une partition de $\Omega = \{PP; PF, FF, FP\}$** .

IX. Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire :

A. Probabilité d'un cas possible être réaliser (ou d'un évènement élémentaire être réaliser) :

a. Activité :

On lance dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1^{er} lancer donne P et la 2^{ème} lancer donne F cet éventualité (ou cas possible) sera noté **PF** .

Cet expérience est répétée 1000 fois on obtenue les résultats suivants :

Cas possibles (évènement élémentaire)	FF	FP	PF	PP
Nombres des cas possibles être réaliser	240	260	270	230

1. Quel est l'évènement élémentaire qui a une grande chance d'être réaliser ?

C'est l'évènement élémentaire **PF** , on dit que probabilité pour obtenir **PF** est $\frac{270}{1000}$ on écrit

$$p(\{PF\}) = \frac{270}{1000} = 0,27.$$

2. Quel est l'événement élémentaire qui a une faible chance d'être réaliser ?

C'est l'événement élémentaire **PP**, on dit que probabilité pour obtenir **PF** est $\frac{230}{1000}$ on écrit

$$p(\{PF\}) = \frac{230}{1000} = 0,23.$$

B. Probabilité sur univers fini (un ensemble fini) :

a. Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire .

- Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre de fois on a obtenue ω_i . Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l' événement élémentaire

$\{\omega_i\}$ on note $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$ sans oublier $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

- Probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A on note $p(A)$ (exemple : $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_7\}$ donc

$$p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_7\})$$

b. Exemple :

$$\Omega = \{PP; PF, FF, FP\} \text{ donc } p(\{PP; PF, FF, FP\}) = 1$$

c. Propriété :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire

- $\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1$ et $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$.
- et
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

C. Hypothèse d'équiprobabilité :

a. Propriété :

Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est Ω) tous les événements élémentaires $A = \{\omega_i\}$ ont même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = \dots = p(\{\omega_n\})$) alors probabilité d'un évènement A de Ω est $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

b. Remarque :

équiprobabilité est exprimé par les expressions suivants :

- des boules indiscernables aux touchés .

- On lance un dé (ou une pièce de monnaie) au hasard .

c. Exemple :

On lance au hasard dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1^{er} lancer donne P et la 2^{ème} lancer donne F cet éventualité (ou cas possible) sera noté **PF** .

On considère l'événement suivant :

A « on obtient le même résultat après le lancement de la pièce de monnaie deux fois »

On a : $A = \{PP, FF\}$ donc $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{2}{4}$ car $\Omega = \{PP; PF, FF, FP\}$.

d. Application :

➤ **Application 1 :**

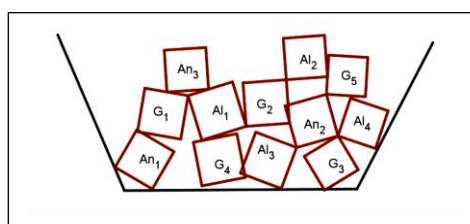
Examen oral en mathématique comporte 5 question en géométrie et 4 question en algèbre et 3 question en analyse .l'étudiant tire simultanément 3 questions d'un sac contenant ces 12 questions .

1. Calculer probabilité des événements suivants :

A « les 3 questions sont en géométrie » .

B « une seule question pour chaque matière » .

C « au moins une question en géométrie » .



Correction :

1. Calculons probabilité des événements :

- Calculons le nombre des cas possibles (c.à.d. $\text{card}\Omega$)

Le tirage simultanément de 3 questions parmi 12 questions représente une combinaison de 3 parmi 12 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 12 donc :

$$\text{card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220 .$$

- On calcule $p(A)$:

On calcule $\text{card}A$

Le tirage simultanément de 3 questions parmi 5 questions représente une combinaison de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 5 donc :

$$\text{card}A = C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10 .$$

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$

- On calcule $p(B)$:

On calcule $\text{card}B$

Le tirage d'une question en géométrie parmi 5 donc $C_5^1 = 5$ et

Le tirage d'une question en algèbre parmi 4 donc $C_4^1 = 4$ et

Le tirage d'une question en analyse parmi 3 donc $C_3^1 = 3$

donc : $\text{card}B = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 5 \times 4 \times 3 = 60 .$

Conclusion : $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

- On calcule $p(C)$.

C « au moins une question en géométrie ». l'événement contraire de C est \bar{C} .

\bar{C} « aucune question en géométrie » on bien :

\bar{C} « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

$$\text{donc : } \text{card}\bar{C} = \binom{7}{1} \binom{6}{2} \binom{5}{3} = 35.$$

$$\text{D'où : } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}\bar{C}}{\text{card}\Omega} = \frac{\binom{7}{1} \binom{6}{2} \binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7 \times 5}{12 \times 11 \times 10} = \frac{7}{264}.$$

$$\text{Conclusion : } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{7}{264} = \frac{257}{264}$$

➤ Application 2 :

1. Maintenant le tirage est de trois questions sont tirés l'une après l'autre sans remise .
Calculer probabilité de l'événement suivant :

A « les 3 questions sont en géométrie » .

- Calculons le nombre des cas possibles (c.à.d. $\text{card}\Omega$)

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et sans remise parmi 12 questions représente une arrangement sans répétition de 3 parmi 12 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement sans répétition de 3 parmi 12 donc : $\text{card}\Omega = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$.

- On calcule $p(A)$:

On calcule $\text{card}A$

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et sans remise parmi 5 questions représente une arrangement sans répétition de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement sans répétition de 3 parmi 5 donc : $\text{card}A = A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

$$\text{Conclusion : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{60}{1320} = \frac{60}{60 \times 22} = \frac{1}{22}.$$

2^{ème} méthode :

La première question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{5}{12}$.

La deuxième question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{4}{11}$

La troisième question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{3}{10}$

$$\text{Donc : } p(A) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

2. On calcule $p(B)$ tel que : B « une seule question pour chaque matière » .

On calcule $\text{card}B$

On tire une question en géométrie donc on a $A_5^1 = 5$ manière différentes .

On tire une question en algèbre donc on a $A_4^1 = 4$ manière différentes

On tire une question en analyse donc on a $A_3^1 = 3$ manière différentes

Si la 1^{ère} question en géométrie et la 2^{ème} en algèbre et la 3^{ème} en analyse on aura $A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1$ manière différentes mais on ne sait pas l'ordre des 3 matières pour obtenir les 3 questions par suite c'est d'ordonnée 3 questions parmi 3 matières d'où le nombre de manières est A_3^3 ou $3!$

Par suite $\text{card}B = 3! \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 = 6 \times 60 = 360$

Conclusion :
$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{3! \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1}{A_{12}^3} = \frac{6 \times 60}{1320} = \frac{60 \times 6}{60 \times 22} = \frac{3}{11}$$

Explication :

Numéro de la question	Q 1	Q 2	Q 3
quelle matière	algèbre	géométrie	analyse
quelle matière	géométrie	analyse	algèbre
quelle matière	algèbre	analyse	géométrie
...
↓	↓	↓	↓
On a $3! = 6$ cas possibles (manières)			

3. On calcule $p(C)$ tel que : C « au moins une question en géométrie » .

On calcule $\text{card}C$

C « au moins une question en géométrie » . l'événement contraire de C est \bar{C} .

\bar{C} « aucune question en géométrie » on bien :

\bar{C} « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

donc : $\text{card}C = A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

D'où :
$$p(\bar{C}) = \frac{\text{card}\bar{C}}{\text{card}\Omega} = \frac{A_7^3}{A_{12}^3} = \frac{210}{1320} = \frac{7}{44}$$

Conclusion :
$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$$

➤ Application 3 :

1. Maintenant le tirage est de trois questions sont tirés l'une après l'autre avec remise .
Calculer probabilité de l'événement suivant :

A « les 3 questions sont en géométrie » .

- Calculons le nombre des cas possibles (c.à.d. $\text{card}\Omega$)

1^{ère} méthode :

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et avec remise parmi 12 questions représente une arrangement avec répétition de 3 parmi 12 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement avec répétition de 3 parmi 12 donc : $\text{card}\Omega = 12^3 = 1\ 902\ 528$.

2^{ème} méthode :

La 1^{ère} question tiré a 12 cas possibles (ou manières) .

La 2^{ème} question tiré a 12 cas possibles (ou manières) . (avec remise)

La 3^{ème} question tiré a 12 cas possibles (ou manières) . (avec remise)

D'après le principe général de dénombrement (ou principe du produit) donc :

$$\text{card}\Omega = 12 \times 12 \times 12 = 12^3 = 1\ 902\ 528$$
 (c'est mieux de d'écrire $\text{card}\Omega = 12 \times 12 \times 12 = 12^3$)

- On calcule $p(A)$:

On calcule $\text{card}A$

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et avec remise parmi 5 questions représente un arrangement avec répétition de 3 parmi 5, d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangements avec répétition de 3 parmi 5 donc : $\text{card}A = 5^3 = 125$.

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{5^3}{12^3} = \left(\frac{5}{12}\right)^3$.

2^{ème} méthode :

La première question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{5}{12}$.

La deuxième question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{5}{12}$ (avec remise)

La troisième question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{5}{12}$ (avec remise)

Donc : $p(A) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \left(\frac{5}{12}\right)^3$

2. On calcule $p(B)$ tel que : B « une seule question pour chaque matière » .

On calcule $\text{card}B$

On tire une question en géométrie donc on a 5^1 manière différentes .

On tire une question en algèbre donc on a 4^1 manière différentes

On tire une question en analyse donc on a 3^1 manière différentes

Si la 1^{ère} question est en géométrie et la 2^{ème} en algèbre et la 3^{ème} en analyse on aura $5^1 \times 4^1 \times 3^1$ manière différentes mais on ne sait pas l'ordre des 3 matières pour obtenir les 3 questions par suite c'est d'ordonner 3 questions parmi 3 matières d'où le nombre de manières est A_3^3 ou $3!$

Explication :

Numéro de la question	Q 1	Q 2	Q 3
quelle matière	algèbre	géométrie	analyse
quelle matière	géométrie	analyse	algèbre
quelle matière	algèbre	analyse	géométrie
quelle matière	⋮	⋮	⋮
	↓	↓	↓
	On a $3! = 6$ cas possibles (manières)		

Par suite $\text{card}B = 3! \times 5^1 \times 4^1 \times 3^1 = 6 \times 60 = 360$

Conclusion : $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{3! \times 5^1 \times 4^1 \times 3^1}{12^3} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{12}}{\cancel{12} \times 12 \times 12} = \frac{5}{24}$

3. On calcule $p(C)$ tel que : C « au moins une question en géométrie » .

On calcule $\text{card}C$

C « au moins une question en géométrie » . l'événement contraire de C est \bar{C} .

\bar{C} « aucune question en géométrie » on bien :

\bar{C} « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

donc : $\text{card}\bar{C} = 7^3$

$$\text{D'où : } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}\bar{C}}{\text{card}\Omega} = \frac{7^3}{12^3} = \left(\frac{7}{12}\right)^3.$$

$$\text{Conclusion : } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{12^3 - 7^3}{12^3}$$

X. Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - les probabilités composées :

A. Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants :

a. Définition :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .

- Probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

on la note par $p_A(B)$ ou par $p\left(\frac{B}{A}\right)$ donc on a $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

- A et B sont deux événements indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ou $p_A(B) = p(B)$.
- $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ l'écriture : $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$ s'appelle la formule du probabilité composée .

b. Application :

On dispose une urne U contient neuf jetons indiscernables au toucher:

- Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.
- Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.
- Quatre jetons noirs numérotés 1 ; 1 ; 1 ; 2.
- ❖ On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
- ❖ On considère les deux événements suivants :

A « Les jetons tirés ont le même numéro »

B « Les trois jetons tirés de couleurs différents »

1. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B .
2. Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.
3. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
4. Donner la probabilité de l'événement : C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que Les trois jetons tirés sont de couleurs différents ».

Correction :

1. Calculons : $p(A)$ et $p(B)$.
 - Calculons : $\text{card}\Omega$:

Le tirage simultanément de 3 jetons parmi 9 jetons représente une combinaison de 3 parmi 9 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 9 donc :

$$\text{card}\Omega = \mathcal{C}_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84.$$

- On calcule $p(A)$:

A « Les jetons tirés ont le même numéro » ou encore

A « Les 3 jetons tirés ont le numéro 1 ou les 3 jetons ont le numéro 2 »

- On calcule $\text{card}A$

- Les 3 jetons tirés ont le numéro 1 parmi 6 donc $\mathcal{C}_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$ manières différentes .
- Les 3 jetons tirés ont le numéro 2 parmi 3 donc $\mathcal{C}_3^3 = 1$ manière .
- Le tirage simultanément de 3 jetons parmi 5 q jetons représente une combinaison de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 5 donc : $\text{card}A = \mathcal{C}_6^3 \times \mathcal{C}_3^3 = 20 \times 1 = 20$.

$$\text{Conclusion : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\mathcal{C}_6^3 \times \mathcal{C}_3^3}{\mathcal{C}_9^3} = \frac{20 \times 1}{84} = \frac{5}{21}$$

- On calcule $p(B)$:

B « Les trois jetons tirés de couleurs différents »

B « un jetons blanc et un jeton jaune et un jeton noir »

- On calcule $\text{card}B$

- un jetons blanc parmi 3 jetons blancs donc $\mathcal{C}_3^1 = 3$ manières différentes .
- un jetons jaune parmi 2 jetons jaunes donc $\mathcal{C}_2^1 = 2$ manières différentes .
- un jetons noir parmi 4 jetons noirs donc $\mathcal{C}_4^1 = 4$ manières différentes .
- donc : $\text{card}B = \mathcal{C}_3^1 \times \mathcal{C}_2^1 \times \mathcal{C}_4^1 = 24$.

$$\text{Conclusion : } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{\mathcal{C}_3^1 \times \mathcal{C}_2^1 \times \mathcal{C}_4^1}{\mathcal{C}_9^3} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Conclusion : } p(A) = \frac{5}{21} \text{ et } p(B) = \frac{2}{7}$$

2. Montrons que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.

On a : l'événement :

A \cap **B** « Les jetons tirés ont le même numéro et Les trois jetons tirés de couleurs différents »

Ou encore : **A** \cap **B** « Les trois jetons tirés de couleurs différents et ils portent le numéro 1 »

- Un jeton blanc parmi un qui porte le numéro 1 .donc $\mathcal{C}_1^1 = 1$
- Un jeton jaune parmi deux qui porte le numéro 1 . donc $\mathcal{C}_2^1 = 2$
- Un jeton noir parmi trois qui porte le numéro 1 . donc $\mathcal{C}_3^1 = 3$

$$\text{Donc } \text{card}A \cap B = \mathcal{C}_1^1 \times \mathcal{C}_2^1 \times \mathcal{C}_3^1 = 6$$

$$\text{D'où : } p(A \cap B) = \frac{\text{card}A \cap B}{\text{card}\Omega} = \frac{\mathcal{C}_1^1 \times \mathcal{C}_2^1 \times \mathcal{C}_3^1}{\mathcal{C}_9^3} = \frac{6}{84 \times 14} = \frac{1}{14}$$

Conclusion : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.

3. On étudie l'indépendance de A et B :

On a : $p(A) \times p(B) = \frac{5}{21} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{144}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$ d'où : $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$

Conclusion : A et B ne sont pas indépendants ou A et B ne sont pas dépendants .

4. Donner la probabilité de l'événement : C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que Les trois jetons tirés sont de couleurs différents ».

Ou encore C « on a l'événement A sachant que B est réalisé » .

D'où $p(C) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{4}$ **Conclusion :** $p(C) = \frac{1}{4}$.

B. Probabilité total :

a. Définition :

A_1, A_2, A_3, \dots et A_n sont des événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire forme une partition de Ω . (A_1, A_2, A_3, \dots et A_n sont disjoints 2 à 2 et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

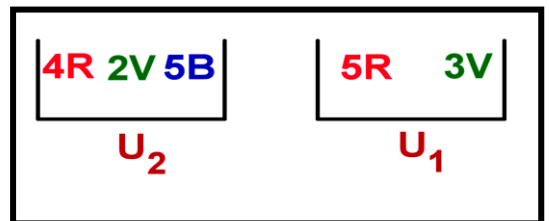
La probabilité d'un événement B de Ω est :

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + p(A_3)p_{A_3}(B) + \dots + p(A_n)p_{A_n}(B).$$

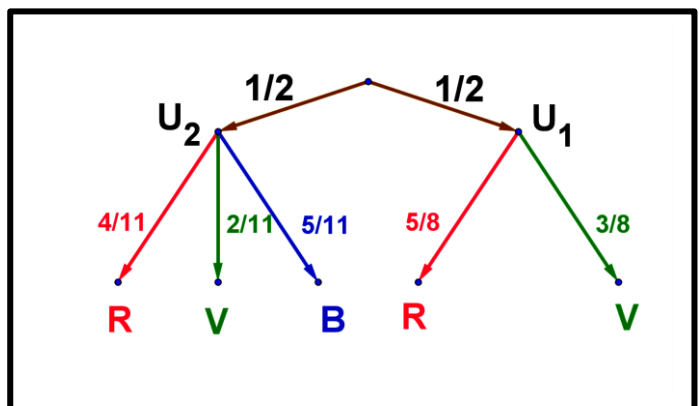
b. Application :

On considère deux urnes U_1 et U_2 tel que :

- U_1 contient 5 pions rouges et 3 pions verts .
- U_2 contient 4 pions rouges et 2 pions verts et 5 pions bleus.
- On choisit au hasard une urne puis on tire un seul pion .
- On considère l'événement V « le tirage donne un pion vert »



1. On construire l'arbre de probabilité :



2. On calcule la probabilité de l'événement V :

On considère les événements suivants :

➤ U_1 « le choix de l'urne U_1 »

➤ U_2 « le choix de l'urne U_2 »

➤ l'événement V « le tirage donne un pion vert » ou encore

V « on choisit l'urne U_1 et le tirage donne un pion vert ou on choisit l'urne U_2 et le tirage donne un pion vert »

D'où V est exprimé de la manière suivante : $V = (U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } p(V) &= P((U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)) \\ &= p(U_1 \cap V) + p(U_2 \cap V) \\ &= p(U_1)p_{U_1}(V) + p(U_2)p_{U_2}(V) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11} = \frac{49}{176} \end{aligned} \text{ Conclusion : } p(V) = \frac{49}{176}$$

3. Calculons probabilité de l'événement B « le choix de l'urne U_1 sachant qu'on obtient un pion vert »

On peut écrire : $p(B)$ de la façon suivante :

$$p(B) = p_v(U_2) = p(U_2 / V) = \frac{p(U_2 \cap V)}{p(V)} = \frac{p(U_2) \times p_{U_2}(V)}{p(V)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{11}}{\frac{49}{176}} = \frac{16}{49}$$

XI. Expérience répétée plusieurs fois :

a. Activité :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

- ❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
- ❖ On considère les deux événements suivants :

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

1. Calculons $p(A)$.

• Calculons : $\text{card}\Omega$:

Le tirage simultanément de 2 boules parmi 6 jetons représente une combinaison de 2 parmi 6, d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 2 parmi 6 donc : $\text{card}\Omega = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$.

• On calcule $p = p(A)$:

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

On calcule $\text{card}A$

- Les deux boules tirés portent des numéros paires parmi 3 (numéros paires sont 2 et 4 et 6)
donc $C_3^2 = C_3^1 = 3$ manières différentes .
- $\text{card}A = C_3^2 = 3$.

$$\text{Conclusion : } p = p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2. ..

- ✓ On répète cette expérience 3 fois successives dont les mêmes conditions de départ (c.à.d. avant de répéter l'expérience on remet les 6 boules dans l'urne)
- ✓ On s'intéresse au nombre de fois que l'événement A était réalisé

b. Vocabulaire :

on dit que :

- ✓ l'expérience est répétée 3 fois **dont les mêmes conditions de départ.**
- ✓ l'événement A était réalisé k fois avec $k \in \{0,1,2,3\}$.

c. Propriété :

Soit $p = p(A)$ est la probabilité d'un événement A d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

Soit l'événement C « l'événement A était réalisé k fois après avoir répète cette expérience aléatoire n fois **dont les mêmes conditions de départ** » avec $k \in \{0,1,2,3\}$.

La probabilité l'événement C est $p(C) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ et $p = p(A)$

d. Exemple :

On prend l'activité précédente . On considère l'événement C « l'événement A était réalisé 2 fois après avoir répète cette expérience aléatoire 3 fois **dont les mêmes conditions de départ** »

On calcule p(C) . On a : $p(C) = C_3^2 (p(A))^2 (1-p)^{3-2} = 3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}$.

XII. Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type :

A. Variables aléatoire :

a. Activité : On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après chaque tirage .

Lorsque le tirage deux boules paires donc le nombre demandé est 0 .

exemple : tirage donne $\omega_1 = \{2,4\}$ le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après ce tirage est 0

Lorsque le tirage une boule paire et l'autre impaire donc le nombre demandé est 1 .

exemple : tirage donne $\omega_2 = \{1,4\}$ le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après ce tirage est 1

Lorsque le tirage deux boules impaires donc le nombre demandé est 2 .

exemple : tirage donne $\omega_3 = \{1,3\}$ le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après ce tirage est 2 .

b. Vocabulaire :

On va relier une relation entre l'ensemble des cas possible c'est-à-dire (c.à.d.) vers l'ensemble \mathbb{R} cette relation sera notée X est appelée variable aléatoire définie de la manière suivante :

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i ; \text{ tel que } X_i \text{ est le nombre des numéros impaire pour chaque tirage } \omega_i .$$

- Les nombres 0 et 1 et 2 sont appelés les valeurs de la variable aléatoire X on note $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$, ces nombres constituent un ensemble sera noté $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ est appelé ensemble des valeurs de la variable aléatoire X .dans le cas général on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.
- Tous les cas possibles ω_i (les événements élémentaires) qui sont reliés par X_i forment une partie de Ω cette partie (c'est un événement) sera notée par $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$.
- L'écriture $p(X = x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

c. Exemple :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Soit la variable aléatoire X définie par le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après chaque tirage .

1. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .

2. Calculer la probabilité $p(X = 2)$.

Correction :

1. On détermine les valeurs de la variable aléatoire X .

Les valeurs sont :

- Lorsque le tirage deux boules paires donc $X_1 = 0$.
- Lorsque le tirage une boule paire et l'autre impaire donc $X_2 = 1$.
- Lorsque le tirage deux boules impaires donc $X_3 = 2$.

Conclusion : les sont 0 et 1 et 2 ou encore $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.

2. On calcule la probabilité $p(X = 2)$

On a l'événement $(X = 2)$ « les deux boules tirées portent des numéros impaires »

• $\text{card}(X = 2)$

On tire simultanément 2 boules dont les numéros sont impaires parmi 3 (1et 3 et 5) donc

$\text{card}(X = 2) = C_3^2 = 3$.

• $\text{card}\Omega$

On tire simultanément 2 boules parmi 6 donc $\text{card}\Omega = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$.

Conclusion : $p(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

B. Loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

a. Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$

b. Remarque :

• $p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3) + \dots + p(X = x_n) = 1$

• On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_p	La somme
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_p)$	1

C. Espérance mathématique - - variance – écart-type d'une variable aléatoire X :

a. Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

- Le nombre : $\sum_{i=1}^n x_i \times p(X = x_i) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_n \times p(X = x_n)$ s'appelle

l'espérance mathématique du variable aléatoire X ; on note $E(X)$.

- Le nombre $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
 $= (x_1)^2 \times p(X = x_1) + (x_2)^2 \times p(X = x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X = x_n) - [E(X)]^2$ s'appelle la

variance du variable aléatoire X ; on note $V(X)$.

Remarque : $V(X) \geq 0$.

- Le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type ; du variable aléatoire X . on note $\sigma(X)$

b. Exemple :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Soit la variable aléatoire X définie par le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après chaque tirage .

- Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .
- Donner la loi de probabilité X .
- Calculer l'espérance mathématique de X .
- Calculer la variance de X puis l'écart-type de X .

Correction :

- On détermine les valeurs de la variable aléatoire X .
 Les valeurs sont : 0 et 1 et 2 (on a déjà traité cette question) .
- Loi de probabilité de X . La loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	La somme
$p(X = x_i)$	$p(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	$p(X = 1) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3 \times 3}{15} = \frac{3}{5}$	$p(X = 2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1$
$x_i \times p(X = x_i)$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$E(X) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$
$x_i^2 \times p(X = x_i)$	0	$1^2 \times \frac{3}{5}$	$2^2 \times \frac{2}{5}$	

- L'espérance mathématique de X .

D'après le tableau on a :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) = 0 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Conclusion : $E(X) = 1$.

4. la variance de X puis l'écart-type de X .

- la variance de X

On a :

$$V(X) = (x_1)^2 \times p(X=x_1) + (x_2)^2 \times p(X=x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X=x_n) - [E(X)]^2$$

$$= 0 + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} - 1^2 = 0$$

Conclusion : $V(X) = 0$

- l'écart-type de X .

On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0} = 0$.

XIII. Loi binomiale ou distribution binomiale :

a. Propriété et définition :

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois)

On répète cette expérience n fois (dont les mêmes conditions de départ)

On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'événement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »

Ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p on note $X = B(n, p)$

b. Exemple :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

- ❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
- ❖ On considère les deux événements suivants :

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

1. Calculons $p(A)$.

2. Soit X la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'événement A est réalisé après avoir répéter de l'expérience de départ 4 fois »

On considère l'événement C « l'événement A était réalisé 3 fois après avoir répète cette expérience aléatoire 4 fois dont les mêmes conditions de départ »

Calculer $p(C)$ puis donner espérance mathématique de X .

$$\text{On a : } p(C) = C_3^2 (p(A))^2 (1-p)^{3-2} = 3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}.$$

Correction :

1. On calcule : $p(A)$

- Calculons : $\text{card}\Omega$:

Le tirage simultanément de 2 boules parmi 6 jetons représente une combinaison de 2 parmi 6 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 2 parmi 6 donc :

$$\text{card}\Omega = C_2^6 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15.$$

- On calcule $p = p(A)$:

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

On calcule $\text{card}A$

- Les deux boules tirés portent des numéros paires parmi 3 (numéros paires sont 2 et 4 et 6)
donc $C_3^2 = C_3^1 = 3$ manières différentes .
- $\text{card}A = C_3^2 = 3$.

Conclusion : $p = p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

2. .. On calcule $p(C)$ puis donner espérance mathématique de X .

On remarque :

- X est une loi binomiale (ou distribution) de paramètres $n = 4$ et $p = p(A) = \frac{1}{5}$ on note $X = B\left(4, \frac{1}{5}\right)$.
- $C = (X = 3)$ d'où : $p(C) = p(X = 3) = C_4^3 (p(A))^3 (1-p)^{4-3} = 4 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{16}{625}$.

Conclusion : $p(C) = p(X = 3) = \frac{16}{625}$